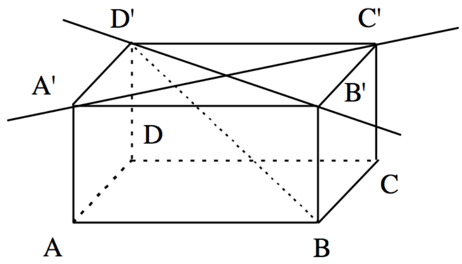
CHAPITRE 10

Géométrie dans l'espace

1 Rappels

1.1 Positions relatives de plans et droites



Deux plans peuvent être :
- **confondus** (ex. : A'D'C' et D'C'B')
- **parallèles disjoints** (ex. : A'D'D et B'C'C)
- **sécants** (D'C'B' et B'C'C)

Une droite et un plan
- La droite peut être **incluse dans le plan** . (ex : D'B' appartient à A'D'C')
- La droite et le plan peuvent être **disjoints**. (ex : la droite D'B' et le plan ABCD)
- La droite et le plan peuvent être **sécants**. (ex. : la droite D'B et le plan ABCD)

Deux droites peuvent être
- **confondues**
- **parallèles disjointes** (ex. : AA' et BB') Dans ce cas elles sont **coplanaires**.
- **gauches** (ex. : AA' et BC) Dans ce cas elles ne sont **pas coplanaires**.

- **sécantes** (ex : D'B' et A'C')

Propriété : Deux plans distincts ayant un point commun ont au moins une droite commune comprenant ce point.

1.2 Droites et plans parallèles

Droites

Définition : Deux droites de l'espace sont parallèles lorsqu'elles sont coplanaires et non sécantes

Propriétés :

- Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles : (d1 // d2 et d2// d3) $\Rightarrow$ d1 // d3
- Il existe une et une seule droite passant par un point donné et parallèle à une droite donnée.
- Si deux droites sont parallèles , tout plan qui coupe l'une coupe l'autre.

Plans

Définition : Deux plans sont parallèles lorsqu'ils ne sont pas sécants (ils sont disjoints)

Propriétés :

- Deux plans parallèles à un même troisième sont parallèles entre eux : a1// a2 et a2 // a3 $\Rightarrow$ a1// a3
- Il existe un et un seul plan passant par un point donné et parallèle à un plan donné.
- Si 2 plans sont parallèles :

a) toute droite de l'un est parallèle à l'autre

b) toute droite qui perce l'un perce l'autre.

c) tout plan qui coupe l'un coupe l'autre, et les droites d'intersection sont parallèles.

Droites et plans

Définition : Une droite et un plan sont parallèles lorsqu'ils ne sont pas sécants

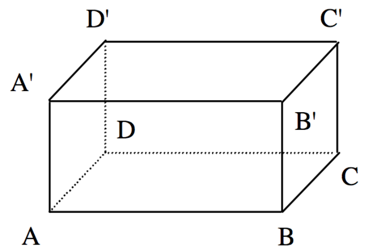
On peut obtenir une droite d et un plan α parallèles de plusieurs manières :

- A partir de deux plans parallèles : toute droite de l'un est parallèle à l'autre (ex. : A'B'C'D' // ABCD $\Rightarrow$ D'B' // ABCD car D'B' inclu dans A'B'C'D')
- A partir de deux droites parallèles : tout plan contenant l'une est parallèle à l'autre. (ex. : AB // A'B' et ABC'D' contient AB $\Rightarrow$ ABC'D' // A'B')

Critère de parallélisme d'une droite et un plan : Une droite est parallèle à un plan ssi elle est parallèle à une droite de ce plan
Critère de parallélisme de deux plans : Deux plans sont parallèles ssi l'un d'eux contient deux droites sécantes respectivement parallèles à l'autre.

Propriété importante : Le parallélisme "droite - plan" est conservé lorsqu'on remplace la droite par une droite parallèle et le plan par un plan parallèle (d// π et d // d' et $\pi//\pi'$)$\Rightarrow$ d'//π'

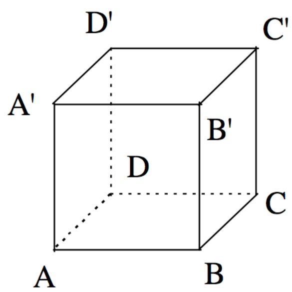
1 Dans le parallélépipède ci-dessous, les points I, J et K sont les milieux respectifs des arêtes AB, A'B' et D'C' :



1) Montrer que B, C, K et J sont dans un même plan α.
2) Prouver que ID' est parallèle à α.

2 Démontrer que les diagonales d'un cube se coupent en leur milieu

3 Dans le cube standard d'arête a, démontrer que le triangle AB'D' est équilatéral.Calculer l'aire de ce triangle en fonction de a.



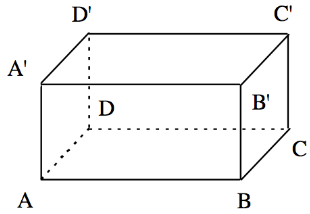
4 Dans le tétraèdre ABCD, P est le centre de gravité du triangle ABC et Q est le centre de gravité du triangle ACD. Démontrer que PQ est parallèle à BD.

2 Orthogonalité

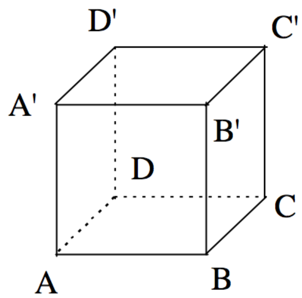
Droites

> **Définition** : Deux droites sont orthogonales lorsque leurs parallèles menées par un point quelconque de l'espace sont perpendiculaires.

Exemple Considérons les arêtes A'D' et B'B. Leurs parallèles respectives menées par le point C' (B'C' et CC') sont perpendiculaires. Les droites A'D' et B'B sont dites orthogonales. On notera : $A'D' \perp B'B$



Application. Dans le cube ci-dessous, les droites BD et A'C' sont orthogonales. En effet, $A'C' \perp D'B'$ (diagonales d'un carré)
De plus D'B' // BD (car BB'D'D est un parallélogramme car BB' et DD' sont parallèles et de même longueur) Et nous avons bien $A'C' \perp BD$



2.1 Droites et plans

> **Définition** : une droite d et un plan α sont orthogonaux lorsque la droite **d est orthogonale à toute droite du plan** α

(exemple du mouvement d'une porte)

> **Critère d'orthogonalité** : Si une droite est orthogonale (ou perpendiculaire) à deux droites sécantes d'un plan, alors cette droite est orthogonale à ce plan.

Pour prouver qu'une droite est orthogonale à un plan, il suffit donc de prouver qu'elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Exemple

Exemple.

Soit à prouver sur le cube ci-contre que la droite D'B' est orthogonale au plan AA'C'C.

Démonstration : AA' ⊥ A'B' et AA' ⊥ A'D' (car arêtes consécutives du cube)

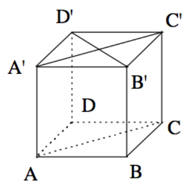
⇒ AA' ⊥ A'B'D' (car AA' ⊥ 2 droites sécantes de ce plan) ⇒ A'A' ⊥ à toute droite de ce plan. ⇒ En particulier, AA' ⊥ D'B'

Or D'B' ⊥ A'C' (diagonales d'un carré)

D'B' est donc orthogonale à deux droites sécantes du plan AA'C'C

⇔ D'B' ⊥ plan AA'C'C

N.B. on peut aussi en conclure D'B' ⊥ A'C , D'B' ⊥ AC' ...



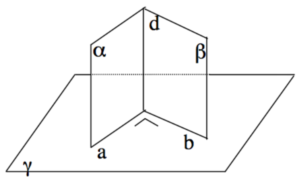
Propriétés :

- Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles
- Deux plans orthogonaux à une même droite sont parallèles

Critère d'orthogonalité : Deux droites sont orthogonales si l'une d'elles est incluse dans un plan perpendiculaire à l'autre.

2.2 Plans

Définition : deux plans sont perpendiculaires ssi tout plan perpendiculaire à leur droite d'intersection coupe ces plans selon deux droites perpendiculaires



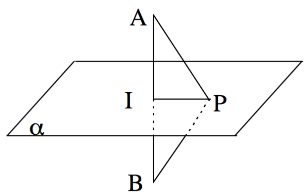
Critère d'orthogonalité : deux plans sont perpendiculaires ssi l'un d'eux contient une droite orthogonale à l'autre.

3 Plan médiateur

Le plan médiateur dans l'espace joue un rôle analogue à celui de la médiatrice dans le plan.

Définition : On appelle plan médiateur d'un segment [AB], le plan perpendiculaire à la droite AB passant par le milieu du segment [AB]

Propriété : soit α le plan médiateur d'un segment [AB]. Tout point P de α est équidistant de A et de B et réciproquement, tout point P de l'espace situé à égale distance des extrémités de [AB] est un point de α.
Autrement dit, le plan médiateur d'un segment est le lieu des points équidistants des extrémités du segment.



En bref

Comment démontrer ?

Qu'une droite est perpendiculaire à un plan :

- Démontrer que cette droite est perpendiculaire à 2 droites sécantes du plan
- Ou montrer que le plan est le plan médiateur d'un segment de la droite (ce qui revient à montrer que 3 points du plan sont à égale distance des extrémités du segment)

Que 2 droites sont orthogonales :

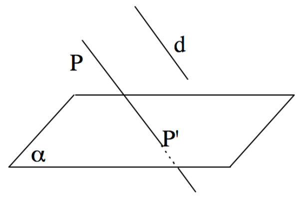
- Démontrer que l'une d'elles est dans un plan perpendiculaire à l'autre
- Ou montrer que l'une d'elles est dans le plan médiateur d'un segment de l'autre (ce qui revient à montrer que 2 de ses points sont à égale distance des extrémités du segment)

Que 2 plans sont perpendiculaires :

- Montrer qu'un 3ème plan perpendiculaire à la droite d'intersection des 2 plans coupe ceux-ci selon 2 droites perpendiculaires
- Ou montrer que l'un d'eux contient une droite perpendiculaire à l'autre.

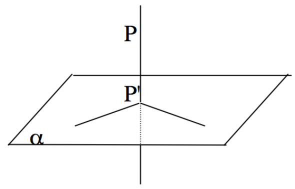
4 Projections et distances

Projeté d'un point P selon une droite d



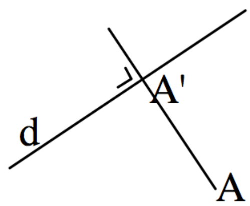
Projection orthogonale :

La droite orthogonale à α menée du point P perce le plan α en P' qui est la projection orthogonale de P sur α



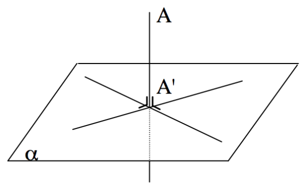
Distance d'un point à une droite

La question se résume à un problème de géométrie plane : d(A, d)= d(A, A') où A' est le pied de la perpendiculaire a ? d menée par le point A



Distance d'un point à un plan

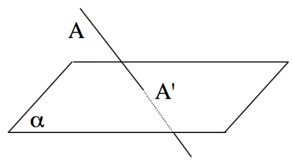
d(A,α)= d(A, A') où A' est la projection othogonale de A

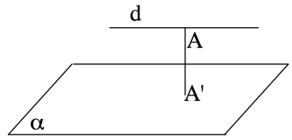


Distance d'une droite à un plan :

Si la droite est sécante au plan, le problème n'a pas de sens.

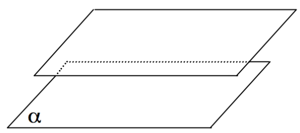
Si la droite est parallèle au plan, alors d(d, α) = distance d'un point quelconque de d à α





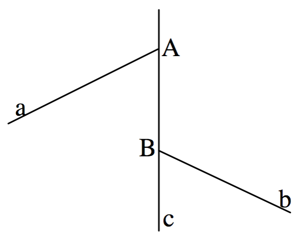
Distance entre deux plans :

Si les plans sont sécants, le problème n'a pas de sens.
Si les plans sont parallèles, alors d(α, β) = distance d'un point quelconque de α à β, on est ainsi ramené au problème de la distance d'un point à un plan

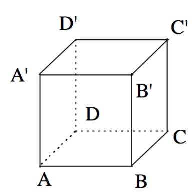


Distance entre deux droites :

Si les deux droites sont sécantes, alors le problème n'a pas de sens
Si elles sont parallèles, alors d(d1, d2) = distance d'un point quelconque de d1 à la droite d2
Si elles sont gauches, on construira la perpendiculaire commune à ces deux droites



5 Vrai Faux



1. Deux droites orthogonales à une même troisième sont parallèles.
2. Deux droites orthogonales à une même plan sont parallèles.
3. Deux plans perpendiculaires à un même plan sont parallèles.

Dans les 3 exercices suivants, on considère le cube standard ABCDA'B'C'D'

4. Les droites DA' et BD sont orthogonales.
5. Le triangle CDA' est rectangle.
6. Les droites B'D et AC' sont sécantes et orthogonales.
7. Dans un parallélépipède rectangle de dimensions 1 cm, 4 cm et 8 cm, la dimension d'une grande diagonale est un nombre entier de centimètres.

6 **Orthogonalité**

1. Les triangles ABC et ABD sont rectangles en B. Démontrer que AB et CD sont orthogonales. (remarque : ABCD ne sont pas nécessairement coplanaires)

2. Sur trois demi-droites d'origine O et perpendiculaires deux à deux, on porte les points A, B et C équidistants de O. Démontrer que les trois paires d'arêtes gauches du tétraèdre OABC sont orthogonales.

3. Dans le cube standard ABCDA'B'C'D' on note I, J et K les milieux des arêtes [BB'] , [B'C'] et [AA']. Montrer que DA' est orthogonale au plan IJK. (utiliser le parallélisme de DA' et CB')

4. Une pyramide a pour base un carré ABCD de centre O et son sommet S est sur la droite orthogonale au plan du carré issue du point O.

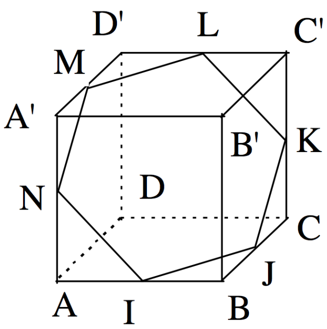
a) Préciser les positions relatives des plans SAC et SBD ? Le démontrer

b) Soit I le milieu de [AB] et J celui de [CD]. Montrer que le plan SIJ est perpendiculaire aux plans SAB et SCD.

7 **Plan Médiateur**

1- Démontrer que deux arêtes gauches d'un tétraèdre régulier sont orthogonales.

2- Dans la figure ci-contre, les points I, J, K, L, M et N sont les milieux respectifs des arêtes AB, BC, CC', C'D', D'A' et A'A du cube ABCDA'B'C'D'.



a) Montrer que chacun de ces six points est à égale distance de D et de B'. Que pouvez-vous en déduire ?

b) Comparer la longueur des segments [IJ] , [JK] , [KL] , [LM] , [MN] et [NI]

c) En déduire la nature de l'hexagone IJKLMN.

8 **Distances**

1. Sur un cube dont l'arête mesure a, calculer :

a) les longueurs des diagonales des faces

b) les longueurs des diagonales
c) la distance d'un sommet au centre d'une face qui ne le comprend pas.
d) la distance d'un sommet au milieu d'une arête qui ne le comprend pas (plusieurs cas !)
e) la distance des milieux de deux arêtes gauches.
f) la distance d'un sommet à un plan diagonal qui ne le comprend pas. g) la distance d'un sommet au plan déterminé par les extrémités des arêtes comprenant ce sommet

2. Sur un tétraèdre régulier d'arête a, calculer
a) la hauteur de chacune des faces
b) la hauteur du tétraèdre
c) la distance des milieux de deux arêtes gauches.

CHAPITRE 11

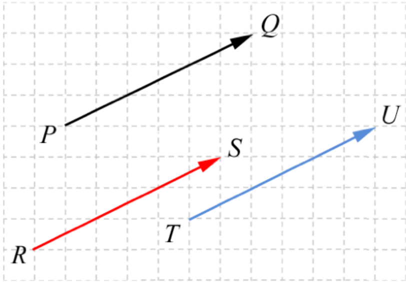
Géométrie vectorielle

1 Introduction

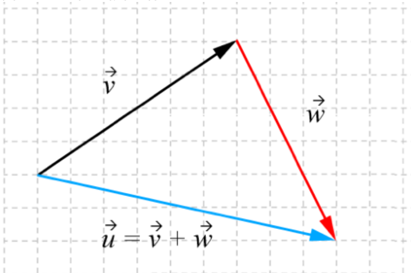
À l'origine, un vecteur est un objet de la géométrie euclidienne. À deux points, Euclide associe leur distance. Or, un couple de points porte une charge d'information plus grande : ils définissent aussi une direction et un sens. Le vecteur synthétise ces informations.
La notion de vecteur peut être définie en dimension deux (le plan) ou trois (l'espace euclidien usuel). Elle se généralise à des espaces de dimension quelconque. Cette notion, devenue abstraite et introduite par un système d'axiomes, est le fondement de la branche des mathématiques appelée **algèbre linéaire**.
Le vecteur permet, en physique, de modéliser des **grandeurs vectorielles** qui ne peuvent être complètement définies par un nombre ou une fonction numérique seuls. Par exemple, pour préciser un déplacement, une vitesse, une force ou un champ électrique, la direction et le sens sont indispensables. Les vecteurs **s'opposent aux grandeurs scalaires** décrites par un simple nombre, comme la masse, la température, ...

1.1 Rappels

Un vecteur est un objet mathématique définie par 2 points, qui a une intensité, une direction et un sens. Il est commode de le représenter par une flèche.
Deux vecteurs sont égaux s'ils ont la même intensité (longueur), la même direction et le même sens. Les trois vecteurs ci-dessous sont égaux, un vecteur n'a pas de "point d'attache".

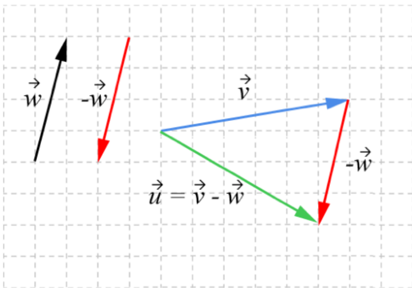


La somme de deux vecteurs est définie comme suit : on met les deux vecteurs bout à bout de sorte que le point terminal du 1er coïncide avec le point initial du second . Le vecteur $\overrightarrow{u}$ relie le point initial de $\overrightarrow{v}$ au point terminal de $\overrightarrow{w}$.



Si les vecteurs sont portés par les points A, B et C, on parle de **relation de Chasles** : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

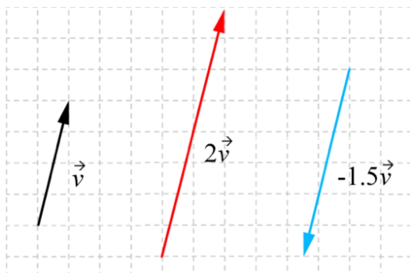
La soustraction de deux vecteurs peut-être schématisée ainsi :



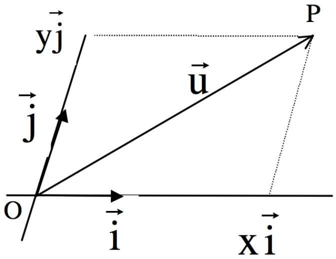
Multiplication par un scalaire : r.$\overrightarrow{v}$ est un vecteur :

- de même direction que AB
- de même sens que $\overrightarrow{v}$ si r est positif et de sens opposé si r est négatif.
- de longueur égale à r fois celle de $\overrightarrow{v}$

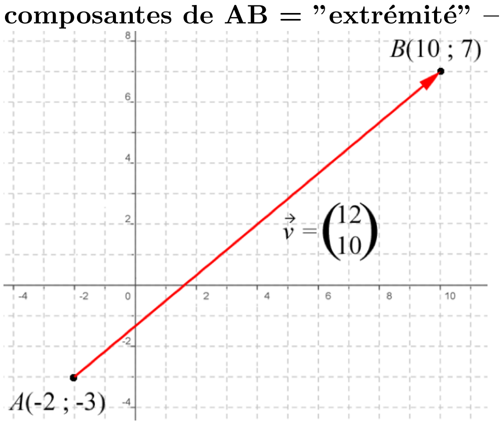
On dit que r$\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **colinéaires**



Composantes d'un vecteur dans un repère : Dans le plan, on choisit une origine O et deux vecteurs non nuls et non parallèles $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$. Chaque vecteur du plan se décompose de façon unique en une somme de multiples de ces vecteurs (**combinaison linéaire de ces vecteurs**).
On a $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$

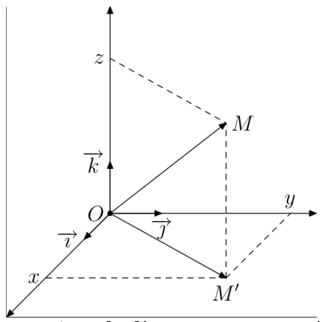


(x, y) sont les **composantes du vecteur** $\overrightarrow{u}$ dans ce repère.
(x, y) sont les **coordonnées du point P** tel que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{u}$.
Les composantes de la somme de deux vecteurs valent la somme des composantes, et les composantes de r$\overrightarrow{u}$ valent r fois les composante de $\overrightarrow{u}$.
On note :
$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$
et $r(x, y) = (rx, ry)$
Soit $\overrightarrow{v}$ porté par deux points $A(x_1, y_1)$ et $B(x_2, y_2)$
$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$
composantes de AB = "extrémité" − "origine"



1.2 Généralisation dans l'espace

On muni l'espace d'une origine O, et de 3 vecteurs directeurs $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$.

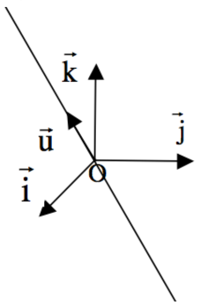


Tout point de l'espace est repéré par un triplet de coordonnées (x,y,z).
Les notions sur les vecteurs vues dans le plan restent valables dans l'espace. L'addition de deux vecteurs et la multiplication d'un vecteur par un scalaire se définissent comme pour les vecteurs du plan, et possèdent les mêmes propriétés qu'en géométrie plane.

2 Equations d'une droite passant par l'origine.

Equations vectorielles

Considérons une droite d passant par l'origine O et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$



Tout point P de la droite d est tel que $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires.

L'équation vectorielle de d est $\overrightarrow{OP} = r\,\overrightarrow{u}$

Equations paramétriques

Soient P(x,y,z) et $\overrightarrow{u}(u_x, u_y, u_z)$

$$\begin{cases} x = r.u_x \\ y = r.u_y \\ z = r.u_z \end{cases}$$ sont les équations paramétriques de la droite d.

Equations cartésiennes

Pour obtenir les équations cartésiennes, **il faut éliminer le paramètre** dans les équations paramétriques pour **obtenir 2 équations linéaires en x,y,z**.

Exemple Soit d la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(2,3,0)$.
Eq. vect. : $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{u}$

Eq. Param. : $\begin{cases} x = 2.r \\ y = 3.r \\ z = 0 \end{cases}$

Eq. cart : $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

3 Equation d'une droite quelconque

Soit d une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ passant par $A(x_A, y_A, z_A)$

Equation vectorielle

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{u}$$

Equations paramétriques

$$\begin{cases} x = x_A + r.u_x \\ y = y_A + r.u_y \\ z = z_A + r.u_z \end{cases}$$

Equation cartésienne

On élimine le paramètre r dans les équations paramétriques. On obtient un système de 2 équations à 3 inconnues (qui correspond à l'intersection de 2 plans) :

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Droite déterminée par 2 points

Pour déterminer les équations d'une droite passant par 2 points A et B, nous constatons que $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur, et que la droite passe par le point A. **On est donc ramené à la situation précédente**.

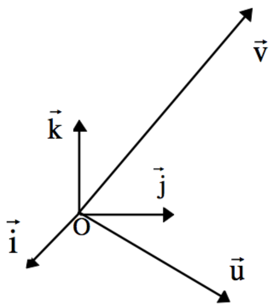
Exemple Ecrire les équations vectorielles, paramétriques, puis cartésiennes de la droite passant par A(1,4,-3) et B(2,5,1)
$\overrightarrow{AB} = (1,1,4)$ Eq. vect. : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + r.(1,1,4)$

Eq. param. : $\begin{cases} x = 1 + 1.r \\ y = 4 + 1.r \\ z = -3 + 4.r \end{cases}$

Eq. cart. : 1ere éq : r=x-1, d'où $\begin{cases} y = x - 1 + 4 \\ z = 4x - 4 - 3 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 4x - z - 7 = 0 \end{cases}$

4 Equations d'un plan passant par l'origine

Considérons le plan π_0 passant par l'origine et contenant les vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.



Equation vectorielle

Tout point P du plan est tel que $\overrightarrow{OP}$ peut s'écrire comme **combinaison linéaire** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Pour tout point P du plan π_0, il existe un couple unique de réels r et s tels que $\overrightarrow{OP} = r.\overrightarrow{u} + s.\overrightarrow{v}$
Cette équation est l'**équation vectorielle du plan** π_0.

Equations paramétriques

Elles sont obtenues en **écrivant les composantes** de l'équation vectorielle :

Equations paramétriques du plan : $\begin{cases} x = r.u_x + s.v_x \\ y = r.u_y + s.v_y \\ z = r.u_z + s.v_z \end{cases}$

Exemple Soit le plan défini par les vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}(1, -1, 0)$ et $\overrightarrow{v}(2, 0, 1)$

Eq. vect. : Tout ploint du plan est tel que $\overrightarrow{OP} = r\overrightarrow{u} + s\overrightarrow{v}$

Eq. param. : $\begin{cases} x = r + 2s \\ y = -r \\ z = s \end{cases}$

En faisant varier les valeurs de r et s, on obtient les coordonnées de différents points du plan.

Equations cartésiennes

En éliminant le paramètre dans les équations ci-dessus, on obtient l'équation $x = -y + 2z$, soit $x + y - 2z = 0$, qui est l'équation cartésienne du plan.
Remarque : écriture sous forme d'un déterminant.
On peut constater que le déterminant suivant est nul(1er col. = 2e c+3e c) :
$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ y & -1 & 0 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Son calcul permet de retrouver l'équation du plan.
De façon générale, $\begin{vmatrix} x & u_x & v_x \\ y & u_y & v_y \\ z & u_z & v_z \end{vmatrix} = 0$ permet de trouver l'équation du plan π_0, toujours de la forme $ax + by + cz = 0$.

5 Equation d'un plan quelconque

Considérons un plan π parallèle à π_0 et passant par le point A.
En écrivant que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$, il vient :

Equation vectorielle

Equation vectorielle : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + r\,\overrightarrow{u} + s\,\overrightarrow{v}$

Equations paramétriques

En écrivant composantes par composantes :

$$\begin{cases} x = x_A + r.u_x + s.v_x \\ y = y_A + r.u_y + s.v_y \\ z = z_A + r.u_z + s.v_z \end{cases}$$

Equations cartésiennes

On doit éliminer les paramètres r et s dans les équations paramétriques.

Le déterminant $\begin{vmatrix} x - x_A & u_x & v_x \\ y - y_A & u_y & v_y \\ z - z_A & u_z & v_z \end{vmatrix} = 0$ donne l'équation du plan, de la forme ax+by+cz+d=0

Plan défini par 3 points

Soient 3 points distincts non alignés A,B et C. On se ramène facilement au cas d'un plan passant par un point A avec 2 vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}$.

Exemple Soient A(0,1,1), B(1,0,1) et C(1,1,0). Ecrire les équations paramétriques et cartésiennes du plan passant par ces 3 points.
$\overrightarrow{AB} = (1,-1,0)$ et $\overrightarrow{AC} = (1,-1,0)$

Il vient : $\begin{cases} x = r + s \\ y = -r + 1 \\ z = -s + 1 \end{cases}$

En éliminant les paramètres, on trouve r=y-1 et s=1-z, d'oùx+y+z-2=0.
(On trouve la même équation en calculant le déterminant $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y-1 & -1 & 0 \\ z-1 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$ 0).

1 Déterminer l'équation cartésienne du plan comprenant A (1, 2, -3) et de vecteurs directeurs : $\overrightarrow{u}$ (3, 1, 2) et $\overrightarrow{v}$ (2, -1, 3)
sol : -x+y+z+2=0

2 Déterminer l'équation cartésienne du plan comprenant A (0, 1, 1), B (1, 0, 1) et C (1, 1, 0)
sol : x+y+z-2=0

3 Déterminer les équations paramétriques et cartésiennes de la droite d, comprenant A (1, -2, 0) et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$(3, 1, -4)

4 Trouver une équation cartésienne du plan comprenant les points K(1,2,3) L(-1,1,4) et M(2,1,-3).
sol : 7x-11y+3z+6=0

5 Montrer que les points K(2,1,0) L(1,-2,-1) M(0,1,-2) et P(2,-5,4) sont coplanaires.

6 Trouver une équation cartésienne du plan π' comprenant le point P (1,0,-1) et parallèle au plan π $\begin{cases} x = 1 + r - s \\ y = -r + s \\ z = 2 + r \end{cases}$
indication : quels sont les vecteurs directeurs de π ? Ecrire l'équation cartésienne de π' à l'aide du déterminant

6 Intersection de droites et de plans, parallélisme

Pour déterminer l'intersection de deux droites, deux plans, d'une droite et d'un plan, on résout le système formé par leurs équations.

6.1 Intersection de deux plans

Soient deux plans α et β d'équations cartésiennes respectives ax+by+cz+d=0 et a'x+b'y+c'z+d'=0. Différents cas peuvent se présenter : les deux plans sont
- **confondus** (a,b,c,d)=k(a',b',c',d')
- **parallèles distincts** : (a,b,c)=k(a',b',c') et $d \neq d'$
- **non parallèles** : leur intersection est une droite. On trouve son équation en résolvant le système.

6.2 Intersection d'un plan et une droite

Il faut résoudre le système de 3 équations à 3 inconnues. Les différents cas sont :
- La droite est **sécante** au plan : le système admet une **solution unique** (x,y,z) correspondant au point de percée.
- La droite **appartient** au plan : la résolution du système mène à l'équation de la droite
- La droite est **parallèle** au plan et distincte : il n'y a **pas de solution** au système.

6.3 Intersection de deux droites

Si l'on a les équations cartésiennes, il faut résoudre le système de 4 équations.
- Le système admet une **solution unique** : les droites sont **sécantes**.
- Le système est **indéterminé** : Les droites sont **confondues**.
- Le système est **impossible** : les droites sont **parallèles distinctes ou gauche**. Elles sont parallèles si leurs vecteurs directeurs sont multiples l'un de l'autre ou encore si le terme indépendant de leur équation cartésienne est différent :

7 Quel est l'intersection du plan α passant par (1,0,3) ; (5,0,6) ; (0,0,0), avec le plan β passant par (0,4,5), (1,9,10) ; (-5,-2,-1) ?

8 Quelle est l'intersection de la droite $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y+z=6 \end{cases}$ avec la droite $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x-3y+2z=4 \end{cases}$?

9 Quelle est l'intersection de la droite $\begin{cases} x+2y=3 \\ x+2z=-3 \end{cases}$ avec le plan x+y+z=0 ?

10 Intersections de droites et d'un plan :

soit $\pi \equiv x - y + z - 3 = 0$ d_1 de vecteur directeur (1, 2, 1) et comprenant A(-1, 1, 2)
d_2 comprend les points B(+1, 1, 2) et C (0, 3, 3)
Déterminer les intersections respectives de ces droites avec π

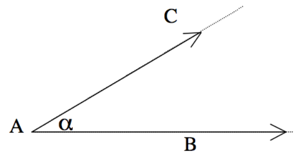
7 Orthogonalité et produit Scalaire

7.1 Produit scalaire

Définition à l'aide du cosinus

Le produit scalaire de deux vecteurs de même origine est égal au produit de leurs longueurs par le cosinus de l'angle formé par ces vecteurs : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |AB| \cdot |AC| . \cos \alpha$

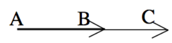
où $\alpha = B\hat{A}C$



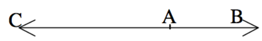
Cas particuliers :

1° Vecteurs alignés

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |AB| . |AC| . \cos B\hat{A}C = |AB| . |AC| \cos 0° = |AB| . |AC|$



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |AB| . |AC| \cos B\hat{A}C = |AB| . |AC| \cos 180° = - |AB| . |AC|$



2° Vecteurs orthogonaux.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |AB| . |AC| . \cos 90° = 0$

En tant que projection d'un vecteur sur l'autre

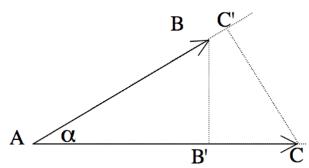
Le produit scalaire de deux vecteurs vaut le produit de la longueur de l'un d'eux par la longueur de la projection orthogonale de l'autre sur le premier, muni du signe adéquat.

<u>Premier cas de figure :</u>

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |AB| . |AC|. \cos \alpha$

Or dans le Δ ABB' : $|AB'| = |AB|. \cos \alpha \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |AB'| . |AC|$

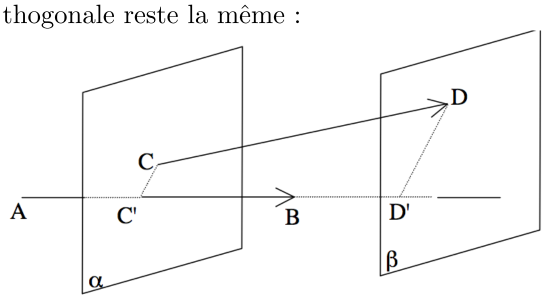
Et dans le Δ ACC' : $|AC'| = |AC|. \cos \alpha \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |AB| . |AC'|$



2nd cas de figure, avec un angle obtu, le cosinus est négatif, le produit scalaire est négatif. Le raisonnement reste le même.

Si les vecteurs n'ont pas même origine, on en déplacera un pour se ramener aux cas précédents

Dans l'espace, la définition du produit scalaire à l'aide de la projection orthogonale reste la même :



Propriétés du produit scalaire :

a) $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$: le produit scalaire est commutatif

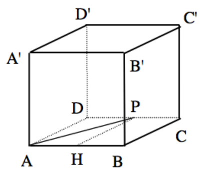
b) $r\,\overrightarrow{AB}\cdot s\,\overrightarrow{AC} = rs\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

c) $\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}) = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF}$: le produit scalaire est distributif par rapport à la somme de 2 vecteurs.

Exemple Dans le cube :

1. Dans le cube ci-contre :

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{A'C'} = |A'B'|\,.\,|A'C'|.\cos 45° = a\,.\,a\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = a^2$



2. Dans le cube ABCDA'B'C'D', P est le milieu de DC

a) Calculer $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{A'B'}$

b) En déduire la valeur de l'angle entre ces deux droites.

N.B. : l'angle entre 2 droites gauches est l'angle aigu formé par 2 droites sécantes parallèles à ces droites.

On a : a) $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB} = |AB|\,.\,|AH| = a\,.\,\dfrac{a}{2} = \dfrac{a^2}{2}$

b) et aussi $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB} = |AP|\,.\,|AB|\cos\alpha$

or $|AP|^2 = |AH|^2 + |PH|^2 = \dfrac{a^2}{4} + a^2 = \dfrac{5a^2}{4} \Rightarrow |AP| = \dfrac{\sqrt{5}}{2}a$ et $|AB| = a$

$\Rightarrow \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{A'B'} = |AP|\,.\,|A'B'|\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{2}a\,.a\,.\cos\alpha$

En égalant ces 2 valeurs du produit scalaire $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{A'B'}$ nous obtenons : $\dfrac{a^2}{2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}a^2\,.\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow \alpha = 63{,}4°$

A l'aide des composantes dans un repère orthonormé

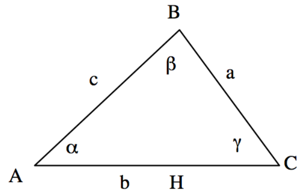
Soient $\overrightarrow{u}(x,y,z)$ et $\overrightarrow{v}(x',y',z')$ deux vecteurs dans un repère orthonormé. En exprimant le produit scalaire $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$, on obtient :

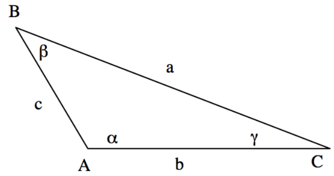
$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$
Cas particulier de la norme d'un vecteur : $\|u\| = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = x^2+y^2+z^2$.

11 Angle entre deux vecteurs, et distance entre 2 points :
On donne A(2,1,-3) et B(4,-2,1). Déterminer l'angle AOB et la distance entre
12 A et B. sol : angle=79,92° et $d(A,B) = \sqrt{29}$ On donne A(3,1,-2) B(§4,-1,3) C(0,1,4) et D(-2,4,-2) dans un repère orthonormé de l'espace. Calculer l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
sol : angle=3 radians

7.2 Pythagore généralisé : Al-Kashi

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\alpha$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac\cos\beta$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\gamma$





Les propriétés du produit scalaire nous permettent de démontrer ces égalités très facilement.
En effet : $b^2 = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right) = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}$
$= c^2 + 2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} + a^2 = a^2 + c^2 + 2\,|AB|\,|BC|\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right) = a^2 + c^2 - 2\,ac\cos\beta$
Les 2 autres égalités se démontrent de façon semblable

7.3 Orthogonalité

Entre deux droites

Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux ssi leur produit scalaire est nul.
Deux droites sont orthogonales ssi leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

Exemple : a) Déterminer m sachant que $d \perp d'$ et d' a pour vecteur directeur $\vec{m}(4, m, -1)$

b) Déterminer ensuite les équations paramétriques de d' sachant que $d' \ni A(4,-1,0)$

$d \equiv \begin{cases} x = r+3 \\ y = -2r+5 \\ z = 3r-1 \end{cases}$ Solution : a) vecteur directeur de d : $\vec{n}(1,-2,3) \perp \vec{m} \Rightarrow m = \dfrac{1}{2}$ b) $d' \equiv \begin{cases} x = 4s+4 \\ y = \frac{1}{2}s-1 \\ z = -s \end{cases}$

Entre une droite et un plan

Une droite d est perpendiculaire à α ssi d est orthogonale à toute droite de α c'est-à-dire ssi un vecteur directeur de d est orthogonal à un vecteur quelconque de α

Exemple : déterminer l'équation cartésienne de π comprenant $A(1,-2,3)$ et $\perp d \equiv \begin{cases} x = 2r+1 \\ y = r-1 \\ z = -r+2 \end{cases}$

Un point $P(x,y,z) \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \perp \vec{v}$ ($\vec{v}$ vecteur directeur de d)

Or : $\overrightarrow{AP}\ (x-1, y+2, z-3)$ et $\vec{v}\ (2,1,-1)$

Et nous avons donc $P \in \pi \Leftrightarrow 2(x-1) + (y+2) - (z-3) = 0$

qui nous donne l'équation cartésienne de π : $2x + y - z + 3 = 0$

Nous constatons que les coefficients de x, y et z sont les composantes du vecteur directeur de d : $\vec{v}$

Généralisation : Soit π un plan d'équation ax+by+cz+d=0.
- Le vecteur $\vec{n}$(a,b,c) est orthogonal à π
- Toute droite orthogonale à π a un vecteur directeur multiple de $\vec{n}$

Exemple 1: $\pi \equiv 2x - 3y + 5z + 12 = 0$ et $d \ni (4, -1, 2)$ et $d \perp \pi$ Solution : $d \equiv \begin{cases} x = 2r + 4 \\ y = -3r - 1 \\ z = 5r + 2 \end{cases}$

Exemple 2 : $d \equiv \begin{cases} x = 2r - 5 \\ y = -3r + 7 \\ z = r - 8 \end{cases}$ Déterminer l'équation cartésienne de π comprenant A(1, 4, -3) si $\pi \perp d$

Solution : $\pi \equiv 2x - 3y + z + 13 = 0$

Entre deux plans

Nous avons vu dans le chapitre précédent que deux plans sont orthogonaux ssi un vecteur normal à l'un des plans est orthogonal à un vecteur normal à l'autre plan.

Nous en déduisons que :

Soient $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$ et $\pi' \equiv ax' + by' + cz' + d' = 0$.
Soient $\overrightarrow{n}(a, b, c)$ et $\overrightarrow{n'}(a', b', c')$ les vecteurs normaux respectivement de π et π'.
Alors $\pi \perp \pi' \iff \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{n'}$
C'est-à-dire $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n'} = 0$
Ou enfin : **aa'+bb'+cc'=0**.

Exemple : $\pi \equiv 2x + 3y - 5z + 1 = 0$ et $\pi' \equiv -3x + y - mz + 5 = 0$ Déterminer m pour que $\pi \perp \pi'$ Sol : $m = \frac{3}{5}$

8 Distances

Distance d'un point à un plan

Soit $P(x_P, y_P, z_P)$ et $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$. D'après ce que nous avons vu juste avant, nous pouvons montrer que

Distance d'un point à un plan : $d(P, \pi) = \dfrac{|a.x_P + b.x_P + c.z_P + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Exemple : Déterminer la distance du point A (1, 2, 0) au plan $\pi \equiv -x + 3y - 2z + 5 = 0$

$$d(A, \pi) = \frac{|-1 + 6 - 0 + 5|}{\sqrt{1 + 9 + 4}} = \frac{10}{\sqrt{14}} = \frac{5\sqrt{14}}{7} = 2,6726$$

Exercices

13 Soient d_1 de vecteur directeur (3,2,-1) et comprenant (0,-1,3)
d_2 de vecteur directeur (1,2,7) et comprenant (2,1,-1)
d_3 de vecteur directeur (3,-2,5) et comprenant (3,-1,5)
Ces droites sont-elles orthogonales entre elles ? sécantes ?

14 d comprend le point (2, -1, 3) et est orthogonale à $\pi \equiv 3x - y + 4z - 5 = 0$. Déterminer les équations paramétriques et cartésiennes de d

15 Soient les plans $\pi_1 \equiv 2x - 3y + z - 5 = 0$, $\pi_2 \equiv 3x - y - 9z + 7 = 0$ et $\pi_3 \equiv 2x + y + z + 3 = 0$. Ces plans sont-ils perpandiculaires ?

16 Calculer la distance de A(-1, 4, 2) au plan $\pi \equiv 3x - 4y + z = 1$

Synthèse

17 Calculer la distance entre les plans :$\pi_1 \equiv 2x - y + z - 1 = 0$ et $\pi_2 \equiv 2x - y + z - 5 = 0$

18 On donne A(1,-1,2) B(2,1,0) et C(4,-1,-1)

a) Vérifier que le triangle ABC est rectangle isocèle de sommet B

b) Déterminer les coordonnées de D pour que la figure ABCD soit un carré.

c) Déterminer les coordonnées de A', B', C' et D' pour que le solide ABCDA'B'C'D' soit un cube.

CHAPITRE 12

Bilan et révisions de fin d'année

1 Matière de l'examen de Juin : ce qu'il faut absolument savoir

1.1 Suites, limites et Asymptotes

☐ Calculer une limite, et lever une indétermination dans les cas de fonctions rationnelles, irrationnelles, trigonométriques.
☐ Déterminer les équations d'asymptotes (AH AV et AO)

1.2 Dérivées, études de fonction et problèmes

☐ Connaître la définition de la dérivée en tant que limite
☐ Comprendre l'interprétation géométrique de la fonction dérivée et du nombre dérivé
☐ Connaître les dérivées des fonctions usuelles
☐ Calculer les dérivées de fonctions rationnelles, irrationnelles, trigonométriques. Savoir en faire l'étude de la variation, max, min, concavité, P.I., asymptotes, points anguleux, de rebroussement...
☐ Calculer l'équation de la tangente au graphe en un point donné.
☐ Associer le graphe d'une fonction à celui de sa dérivée, et inversement.
☐ Connaître le théorème de l'Hôpital et savoir l'appliquer
☐ Modéliser une situation à l'aide d'une fonction, et chercher un optimum (pb géométriques, physique, vitesse et accélération...)
☐ Comparer des modes de croissance (taux de variation associés)

Trigonométrie

☐ Connaître les prérequis (établis en 4ème) à savoir : cercle trigonométrique, nombres trigonométriques, relations liant les unités d'angles, égalité fondamentale, relations dans les triangles rectangles et quelconques.
☐ Connaître les formules trigonométriques de base :
- formules d'addition, de duplication, de factorisation
☐ Connaître les 3 types d'équations trigonométriques fondamentales et l'expression de leurs solutions.
☐ Transformer des expressions comportant des nombres trigonométriques en utilisant les formules de base dans des vérifications d'identités, afin de factoriser une expression.
☐ Etablir la valeur de nombres trigonométriques cherchés sous certaines contraintes à partir d'autres valeurs connues en utilisant les formules trigonométriques de base
☐ Résoudre des équations trigonométriques
- élémentaires, à transformer à partir des relations entre angles associés, à transformer à partir des formules trigonométriques de base
- linéaires
☐ Résoudre des inéquations trigonométriques élémentaires ou aisément transformables en inéquations trigonométriques élémentaires (domaine de définition par exemple).
☐ Exercices généraux utilisant les notions précédentes et notamment utilisation des résolutions d'équations et inéquations trigonométriques dans la recherche de racines d'une fonction trigonométrique, intersection d'une telle fonction avec une droite horizontale, recherche de domaines .

Matrices, déterminants et systèmes

☐ Calculer des déterminants d'ordre 2 et 3
☐ Inverser une matrice d'ordre 2 et 3
☐ Résoudre un système d'équations avec les formules de Cramer, par diagonalisation ou par inversion
☐ Discuter le nombre de solutions d'un système selon la valeur d'un paramètre, et en faire l'interprétation graphique (droites/plan, parallèles, gauches...)
☐ Interpréter un problème en terme de système d'équations et le résoudre

Géométrie dans l'espace

☐ Établir des équations vectorielles, paramétriques et cartésiennes d'une droite et d'un plan à partir d'éléments qui les déterminent.
☐ Calculer analytiquement la distance entre deux points, entre un point et une droite, entre un point et un plan, entre deux droites parallèles, entre deux plans
☐ Associer les coordonnées d'un point à sa position dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
☐ Décomposer un vecteur suivant les directions du repère et lui associer un triplet de nombres.
☐ Connaître et savoir utiliser les différentes expressions du produit scalaire
☐ Calculer l'angle formé par deux vecteurs, la distance entre deux points, la norme d'un vecteur.

2 Exercices de révision

2.1 Limites et asymptotes

1 **Déterminer les domaines des fonctions suivantes et echercher leurs éventuelles asymptotes**

a) $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2}{x^2 - 1}$ b) $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^3 - 1}$

c) $f(x) = \dfrac{3x - 2}{x + 3}$ d) $f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 - 4}$

e) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$ f) $f(x) = \dfrac{x^2 - 5}{x - 3}$

2.2 Calcul de dérivées

2 **Calculer les dérivées des fonctions suivantes**

a) $f(x) = 7x^5 - 3x^4 + 2x^2 - 5x + 2$ b) $f(x) = 4\,(1-5x)^3$

c) $f(x) = (3x - 1)^4\,(2 - x^2)^3$ d) $f(x) = \sqrt[3]{(1 - x^2)^2}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2x - 3}}$ f) $f(x) = \dfrac{7x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 4x}$

g) $f(x) = \left(\dfrac{x}{1 + x}\right)^5$ h) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$

i) $f(x) = \dfrac{(3x - 2)^2}{(1 - 2x)^3}$ j) $f(x) = \dfrac{3x + 2}{\sqrt{2x - 2}}$

k) $f(x) = (1 - 2x)\,\sqrt{3x - 2}$ l) $f(x) = \dfrac{3x}{2\sqrt{x^2 - 4}}$

m) $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{2x^2}{\sqrt{x^3}}$ n) $f(x) = 4\sin^2 x \cos x$

o) $f(x) = \sin\sqrt{3x + 1}$ p) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 2x}$

q) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 - \sin 2x}{1 + \sin 2x}}$ r) $f(x) = 5\sin^4(3x^2 - 2)$

3 **Tangentes**

Recherche de tangentes : soit $f(x) = \dfrac{x - 2}{x - 1}$

a) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de cette fonction en son point d'abscisse – 1

b) Déterminer l'équation de la tangente à ce graphe ayant une pente égale à 4

c) Vérifier graphiquement le résultat obtenu à l'aide de la calculatrice ou du logiciel géogébra.

2.3 Etudes de fonctions

4 Etude de fonction et graphe 1

Etudier la fonction suivante et tracer son graphe de la façon la plus efficace possible : $f(x) = \dfrac{3x-6}{2x+1}$

5 Etude de fonction et graphe 2

Etudier les fonctions suivantes et tracer leurs graphiques (y compris l'étude de f")

a) $f_1(x) = \dfrac{-3x^2+x-2}{1+x}$ b) $f_2(x) = \dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ c) $f_3(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x^3}$

6 Equations de tangentes

Déterminer les équations

a) de la tangente à la courbe $y = f_1(x)$ en son point d'abscisse 2

b) de la (des) tangentes à cette courbe dont la pente vaut $-\dfrac{3}{2}$

2.4 Problèmes de modélisation

7 Le récipient

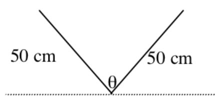
On désire construire un récipient ayant la forme d'un parallélépipède rectangle de base carrée et ayant une capacité de 500 litres. Sachant que le matériau utilisé pour la fabrication du couvercle est deux fois plus coûteux que celui qui entre dans la fabrication du fond et des parois latérales, quelles doivent être les dimensions du récipient pour que le coût soit minimal ?

8 Distance

Quel est le point de la courbe d'équation $y = x^2 + 1$ le plus proche du point (0,4) ?

9 Le réservoir

On construit un réservoir en pliant une feuille de zinc de 1m de large en deux et en fermant les deux extrémités (cfr. schéma ci-contre). Quelle doit être la valeur de l'angle θ pour que la capacité du réservoir soit maximale ?



10 Déplacement

Un corps se déplace sur une ligne horizontale selon la loi $s(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$

Les distances sont exprimées en m et les temps en secondes.

a) Déterminer sa vitesse et son accélération en fonction de t.

b) Quand la vitesse atteint-elle un extremum ? Quel est-il ?

c) Calculer l'espace parcouru durant les 5 premières secondes.

2.5 Matrices, déterminants et systèmes

11 Calcul avec les matrices

$$\text{Calculer :} \left[\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]^t + (3 \quad -1 \quad 2) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

12 Résolution de système

Résoudre le système suivant
a) par la méthode de la recherche de la matrice inverse
b) par la méthode des déterminants
c) par triangularisation

$$\begin{cases} 3x - y - z = 14 \\ 4x + y - z = 12 \\ 2x + y - 3z = 10 \end{cases}$$

13 Triangulation

Résoudre les systèmes suivants par la méthode de triangulation

a) $\begin{cases} x - 3y + z = -4 \\ x - y + z = 2 \\ x - 2y + z = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x + z = 1 \\ -2x + y + 4z = -2 \\ -x - y - z = -1 \end{cases}$

14 Discussion avec paramètre

Résoudre le système suivant et discuter l'ensemble des solutions

$$\begin{cases} (m+2)x + 3y - 3z = 0 \\ x + (m+1)y - z = 1 \\ 2x + 3y + (m-3)z = 0 \end{cases}$$

15 Le colis

Trouver les dimensions d'un colis qui a la forme d'un parallélépipède rectangle sachant que 3 rubans l'entourent en passant par les milieux des côtés des deux faces opposées et se terminent chacun par un nœud nécessitant 20cm. Les rubans mesurent respectivement 240 cm,260 cm, et 280 cm.

2.6 Géométrie dans l'espace

16 Dans un tétraèdre ABCD, la hauteur du Δ ABC comprenant A et la hauteur du Δ BCD comprenant D sont sécantes. Démontrer que les arêtes AD et BC sont orthogonales.

2.7 Géométrie analytique

17

Plans, droites et points

Considérons les 4 plans, 3 points A, B, C, et le vecteur u.

$\pi_1 \equiv 2x - y + z - 3 = 0$ $\quad \pi_2 \equiv x + y - z + 2 = 0$ $\quad \pi_3 \equiv x - y + z - 1 = 0$ $\quad \pi_4 \equiv 2x - y + z - 5 = 0$

A(1, - 2, 3) B (2, 1, 0) C(2, 0, 1)

$\vec{u}$ (1, -1, 2)

1. Déterminer les équations paramétriques et cartésiennes du plan ABC
2. Déterminer les équations paramétriques de $\pi_1 \cap \pi_2$ (préciser le vecteur directeur et un point)
3. Les plans π_1 et π_2 sont ils perpendiculaires ? (justifier)
4. Déterminer l'équation cartésienne de π // π_2 et comprenant le point A
5. Déterminer les équations paramétriques de AB et celles de d ayant comme vecteur directeur $\vec{u}$ et comprenant le point C. Examiner ensuite la position relative de ces deux droites (sécantes, gauches, //, confondues, $\perp$?) Justifier
6. $d_1 \equiv \begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$ $\qquad d_2 \equiv \begin{cases} x - y + z + 2 = 0 \\ x - 2y + z - 3 = 0 \end{cases}$
   Examiner la position relative de ces deux droites (sécantes, gauches, //, confondues, $\perp$?) Justifier
7. Déterminer les équations paramétriques de d comprenant le point A et perpendiculaire à π_1
8. Déterminer $d_1 \cap \pi_1$, $d_2 \cap \pi_2$
9. Déterminer
   a) la distance entre les plans π_1 et π_4
   b) la distance entre le point A et le plan π_2
10. Déterminer l'angle entre π_1 et π_3
11. Déterminer l'angle entre la droite AB et le plan π_1
12. Déterminer l'angle entre les droites AB et BC
13. Déterminer l'équation cartésienne du plan médiateur du segment [AB]
14. Déterminer les équations paramétriques de la perpendiculaire commune à $d_1$et d_2. Préciser les points de contact de cette droite avec d_1 et d_2
    $d_1 \equiv \begin{cases} x = r + 1 \\ y = r - 2 \\ z = -r + 3 \end{cases}$ $\qquad d_2 \equiv \begin{cases} x = s + 2 \\ y = 2s - 1 \\ y = s + 3 \end{cases}$
    Calculer la distance entre ces droites

3 Solutions

Limites et asymptotes

1 Asymptotes

a) AV en x = 1 AO en $\pm\infty$ y = x + 1
b) AV : x = 1 AH : y = 1
c) AV : x = - 3 AH : y = 3 en $\pm\infty$
d) AV : x = - 2 et x = 2 AH : y = 0 en $\pm\infty$
e) AV : / AH / AO : $y = x - \frac{3}{2}$ en $+\infty$ et $y = -x + \frac{3}{2}$ en $-\infty$
f) AV : x = 3 AO : y = x + 3 en $\pm\infty$

Dérivées

2 Dérivées

a) $35x^4 - 12x^2 + 4x - 5$

b) $-60\,(1-5x)^2$

c) $6\,(3x-1)^3\,(2-x^2)^2\,(-5x^2+x+4)$

d) $\dfrac{-4x}{3\sqrt[3]{1-x^2}}$

e) $-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{(2x-3)^4}}$

f) $\dfrac{-22x^2-8x+8}{(2x^2-4x)^2}$

g) $\dfrac{5x^4}{(1+x)^6}$

h) $\dfrac{-1}{\sqrt{(1-x)(1+x)^3}}$

i) $\dfrac{6(3x-2)(x-1)}{(1-2x)^4}$

j) $\dfrac{3x-8}{\sqrt{(2x-2)^3}}$

k) $\dfrac{11-18x}{2\sqrt{3x-2}}$

l) $\dfrac{-6}{\sqrt{(x^2-4)^3}}$

m) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

n) $8\sin x\cos^2 x - 4\sin^3 x$

o) $\dfrac{3\cos\sqrt{3x+1}}{2\sqrt{3x+1}}$

p) $\dfrac{4\sin 2x}{\cos^3 2x}$

q) $\dfrac{-2\cos 2x}{\sqrt{(1-\sin 2x)(1+\sin 2x)^3}}$

r) $120\,x \,.\, \sin^3(3x^2-2) \,.\, \cos(3x^2-2)$

3 Tangentes

a) $y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$

b) $t_1 \equiv y = 4x + 1$ et $t_2 \equiv y = 4x - 7$

Etudes

4 Graphes à vérifier avec Géogébra

5 Graphes à vérifier avec Géogébra

1. Fonction homographique : AH : y = 1.5 AV : x = - 0.5 racine : x = 2 et ∋ (0, - 6)
2. a) dom f : R/ {-1} pas de racine . f(0) = - 2
   AV : x = - 1 A0 : y = - 3x + 4

   $f_1'(x) = \dfrac{-3x^2 - 6x + 3}{(x+1)^2}$ $f_1''(x) = \dfrac{-12}{(1+x)^3}$

		$-1-\sqrt{2}$		-1		$-1+\sqrt{2}$	
f_1'	-	0	+	/	+	0	-
f_1''	+	+	+	/	-	-	-

b) $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ dom f : R/{-1} f(0) = - 1 rac : x = 1

AV : x = - 1
A0 : y = x – 5

$f'(x) = \dfrac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}$ $f''(x) = \dfrac{24(x-1)}{(x+1)^4}$

		-5		-1		1	
f_1'	+	0	-	/	+	0	+
f_1''	-	-	-	/	-	0	+

c) $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x^3}$ dom f : R_0 rac : x = 2

AV : x = 0
AH : y = 0

$f'(x) = \dfrac{-x^2 + 8x - 12}{x^4}$ $f''(x) = \dfrac{2x^2 - 24x + 48}{x^5}$

		0		2		$6-\sqrt{12}$		6		$6+\sqrt{12}$	
f_1'	-	/	-	0	+	+	+	0	-	-	-
f_1''	-	/	+	+	+	0	-	-	-	0	+

6 Tangentes

3. a) x = 2 f(2) = - 4 $f'(2) = \dfrac{1}{3} \Rightarrow t \equiv 3y - x + 14 = 0$

   b) $f'(x) = -\dfrac{3}{2} \Rightarrow x = 1$ ou $x = -3$

   si x = 1 : f(1) = - 2 et $t_1 \equiv 2y + 3x + 1 = 0$
   si x = - 3 : f(-3) = 16 et $t_2 \equiv 2y + 3x - 23 = 0$

Problèmes

7 $c = \dfrac{10}{\sqrt[3]{3}}$ $h = 5\sqrt[3]{9}$

8 $\left(\pm\dfrac{\sqrt{10}}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$

9 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

10 a) $v(t) = 3t^2 - 18t + 24$ $a(t) = 6t - 18$ b) $a = 0$ si $t = 3 \Rightarrow v$ min = - 3 m/s c) 28 m

Matrices et systèmes

11 Solution des exercices 16 à 20 :

1. $(18 \quad 3 \quad 4)$
2. $S = \left\{\left(\frac{28}{9}, \frac{-23}{9}, \frac{-19}{9}\right)\right\}$
3. a) $S = \{(5-\lambda, 3, \lambda), \lambda \in R\}$ b) $S = \varnothing$
4. si $m \notin \{0, \pm 1\}$ $S = \left\{\left(\frac{-3}{m^2-1}, \frac{1}{m+1}, \frac{-3}{m^2-1}\right)\right\}$

   si $m = 0$: $S = \{(3, z - 2, z)\ z \in R\}$ si $m = 1$: $S = \varnothing$ si $m = -1$: $S = \varnothing$.
5. $\begin{cases} 2x + 2y + 20 = 240 \\ 2x + 2z + 20 = 260 \\ 2y + 2z + 20 = 280 \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) = (50, 60, 70)$

15

Géométrie

16 Démonstration

AM hauteur du Δ ABC issue de A et DM hauteur du ΔBCD issue de D : $M \in [BC]$ (hypothèse)
$AM \perp BC$ et $DM \perp BC$ (justifier). En déduire que $BC \perp$ plan AMD (justifier) . En déduire $BC \perp AD$ (justifier)

Géométrie analytique

17 Plans droites et points

1. $\begin{cases} x = 1 + r + s \\ y = -2 + 3r + 2s \\ z = 3 - 3r - 2s \end{cases}$ éq. cart. : $y + z - 1 = 0$
2. $\vec{v}\,(0, 1, 1)$ et $\ni (\frac{1}{3}, \frac{-7}{3}, 0)$
3. $\pi_1 \perp \pi_2$
4. $\pi \equiv x + y - z + 4 = 0$
5. $AB \equiv \begin{cases} x = 1 + r \\ y = -2 + 3r \\ z = 3 - 3r \end{cases}$ $d \equiv \begin{cases} x = 2 + r \\ y = -r \\ z = 1 + 2r \end{cases}$ $\overrightarrow{AB}$ pas // $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ pas $\perp$ $\vec{u}_d \Rightarrow$ les droites ne sont ni parallèles, ni confondues, ni $\perp$. Et $AB \cap d = \varnothing \Rightarrow$ les droites sont gauches.
6. Ces droites sont gauches.
7. $d \equiv \begin{cases} x = 1 + 2r \\ y = -2 - r \\ z = 3 + r \end{cases}$
8. $d_1 \cap \pi_1 = \varnothing$ $(d_1 // \pi_1)$ $d_2 \cap \pi_2 = (-2, -5, -5)$

9. a) $d(\pi_1, \pi_4) = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$ b) $d(A, \pi_2) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

10. Angle entre π_1 et π_3 : $\alpha = 19° \; 28' \; 16''$

11. Angle entre AB et $\pi_1 = 22° \; 6''$

12. Angle entre AB et BC : $13° \; 15' \; 46''$

13. $\pi \perp AB$ et $\ni \left(\frac{3}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{3}{2}\right) \Rightarrow \pi \equiv x + 3y - 3z + \frac{9}{2} = 0$

14. $AB \equiv \begin{cases} x = \frac{10}{7} + \frac{3}{14}r \\ y = -\frac{11}{7} - \frac{2}{14}r \\ z = \frac{18}{7} + \frac{1}{14}r \end{cases}$ $A\left(\frac{10}{7}, -\frac{11}{7}, \frac{18}{7}\right)$ $B\left(\frac{23}{14}, -\frac{24}{14}, \frac{37}{14}\right)$

$d(d_1, d_2) = \dfrac{1}{\sqrt{14}}$